

MOVIMIENTO DE UN FLUIDO CON APORTACION DE CALOR EN TOBERAS DE SECCION VARIABLE

Por CARLOS SANCHEZ TARIFA,

Ingeniero Aeronáutico, del I.N.T.A. «Esteban Terradas».

RESUMEN

Se destacan primeramente la importancia y aplicaciones de la cuestión que aquí va a tratarse, señalando las simplificaciones que se admiten en su estudio. Previamente se considera el proceso de combustión o de aportación de calor en una tobera de sección constante, indicando las diferentes conclusiones a que llegan diversos autores acerca de la interesante cuestión de lo que acontece a la vena flúida cuando se le suministra una cantidad de calor superior a la necesaria para acelerar el gas hasta la velocidad del sonido, así como sobre la posible constancia o no de las condiciones iniciales. Finalmente, se estudia el proceso en una tobera de sección variable, mediante la introducción de una sección media, a fin de poder integrar la ecuación del impulso. Se obtienen diversas conclusiones, en las que se destacan las grandes ventajas que presentan estas toberas en comparación con las de sección constante, como son la posible realización de la combustión sin pérdidas de presión y la posibilidad de absorber mucha mayor cantidad de calor; razones por las cuales se utilizan en las cámaras y sistemas de postcombustión de los turborreactores y turbohélices.

Notación.

- 1 y 2 = subíndices que representarán las condiciones existentes en las secciones de la tobera en las que se inicia y concluye la aportación de calor.
 i = condiciones iniciales antes de la aportación de calor
 e = condiciones exteriores en la sección de salida de la tobera.
 o = condiciones de remanso.
 p = presión estática.
 T = temperatura absoluta (estática).
 v = volumen específico.
 w = velocidad de la corriente.
 N_M = número de MACH.
 S = entropía.
 c_p = calor específico a presión constante.
 J = equivalente mecánico del calor.
 R = constante de los gases en estado de AVOGADRO.
 γ = exponente de las evoluciones isentrópicas.
 q = calor comunicado.
 σ_1 y σ_2 = áreas de las secciones de la tobera correspondientes a los puntos en que se inicia y termina la aportación de calor.
 σ_m = área de la sección media.
 ψ_d y ψ_c = funciones.

Se utilizará en todos los cálculos el sistema técnico de unidades.

DISCUSIÓN PREVIA DEL PROCESO, EN EL CASO DE UNA TOBERA DE SECCIÓN CONSTANTE

Consideraciones preliminares.

En este trabajo vamos a estudiar el movimiento de una corriente de gas, supuesta unidimensional, cuando se aporta a ella una cierta cantidad de calor. Como es norma general en el planteamiento de esta cuestión, prescindiremos de los fenómenos químicos del proceso, suponiendo que no cambia la composición del gas durante la aportación de calor. En rigor, las conclusiones que se obtengan solamente serán válidas para los procesos puramente físicos, en los que el calor se comunica a través de las paredes de la conducción, así como a combustiones diluidas en las que sea pequeña la variación global de las propiedades del gas. No obstante, se extenderán los resultados a cualquier tipo de combustión, pues siempre podrá contarse con una buena aproximación de las condiciones del proceso.

La cuestión que aquí vamos a tratar es de la mayor importancia y tiene un gran número de aplicaciones. El dimensionado de toberas para combustión continua, como las cámaras de combustión de turborreactores y termorreactores, los dispositivos de postcombustión en los primeros, así como todos los sistemas de cambiadores y recuperadores de calor utilizados en gran número de motores térmicos y turbinas de gas, son ejemplos en los que tiene especial aplicación el proceso que aquí vamos a considerar.

No obstante su importancia, la bibliografía concerniente a esta cuestión no es muy abundante. Pueden encontrarse diversos trabajos sobre este problema en varias publicaciones extranjeras, como los citados en las referencias y bibliografía de este artículo, que se refieren especialmente al caso concreto de combustión en una tobera de sección constante. Pero el aspecto más notable de esta cuestión es la discrepancia que existe en las conclusiones a que llegan los diversos autores, todos ellos de reconocida solvencia; discrepancias en los resultados no meramente secundarias, sino de la mayor importancia.

Como es natural, no pretendemos nosotros establecer conclusiones definitivas sobre la cuestión, sino simplemente indicar el planteamiento general del problema en una tobera de sección constante, proceso ya estudiado en las referencias que se insertan, y analizar las diferentes soluciones a que se llega, señalando también las posibles causas de las discrepancias que se observan en los resultados. Finalmente, estudiaremos en primera aproximación el problema de la aportación de calor en el caso de una tobe-

ra de sección variable, problema que realmente es el que presenta un mayor interés práctico.

Consideremos el sistema representado en la figura 1. En la tobera penetra una corriente de gases, a la cual, en la sección 1, comienza a comunicársele calor a través de las paredes de la conducción, designando con el subíndice 2 la sección en la que se considera terminada dicha aportación de calor. Alternativamente podemos suponer también que en la tobera penetra una corriente de aire a la que se añade un chorro de combustible pulverizado, iniciándose la combustión en la sección 1 y terminando en la 2. En este último caso ya mencionamos que no se tendría en cuenta la variación de propiedades del gas durante la combustión, despreciando también la masa adicional del combustible y suponiendo el sistema térmicamente aislado.

Como hipótesis final, indicaremos que no se tendrá en cuenta la variación de los calores específicos con la temperatura, admitiendo que en todo caso el fluido se comportará como un gas perfecto, o bien suponiendo que los calores específicos corresponden a valores medios entre las temperaturas inicial y final.

Tobera de sección constante.

El problema vamos a limitarlo a las secciones 1 y 2, entre las que se verifica la aportación de calor. Representaremos por la letra q el calor producido o comunicado por unidad de peso, calor que supondremos varía de un modo continuo, a partir de un valor inicial igual a cero, entre dichas secciones 1 y 2. Asimismo admitiremos que el proceso es estacionario, prescindiendo por ahora de las condiciones existentes antes de iniciarse la combustión. Como no vamos a considerar solamente procesos de combustión, sino cualquier clase de aportación de calor, podremos admitir también valores negativos de q , que en este caso corresponderá a una sustracción de calor de la corriente de gas.

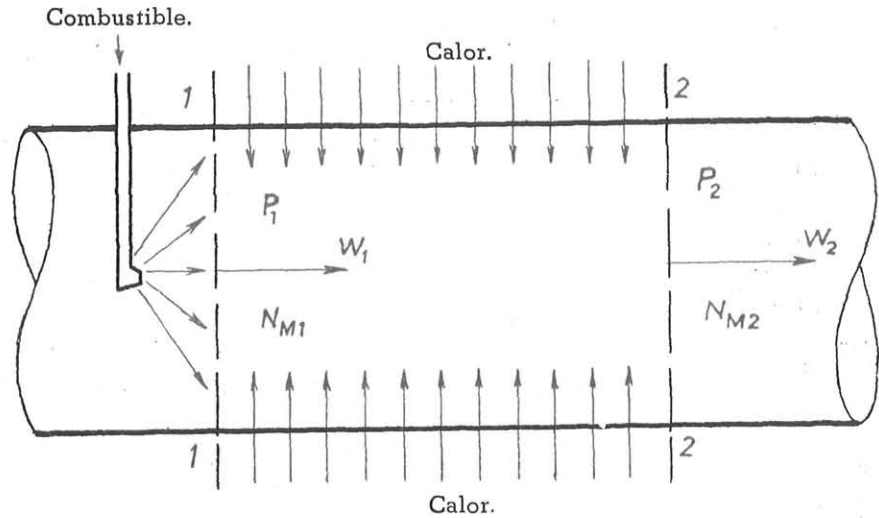
Las ecuaciones del impulso, continuidad y conservación de la energía entre las secciones 1 y 2 se expresan en la forma siguiente:

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 - \gamma N_{M1}^2 \left(\frac{w_2}{w_1} - 1 \right). \quad [1]$$

$$\frac{p_2 N_{M2}^2}{w_2} = \frac{p_1 N_{M1}^2}{w_1}. \quad [2]$$

$$g J q = \frac{1}{\gamma - 1} \left(\frac{w_2^2}{N_{M2}^2} - \frac{w_1^2}{N_{M1}^2} \right) + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2}. \quad [3]$$

Fig. 1. - Proceso de combustión o de aportación de calor en una tobera de sección constante.



El sistema anterior de ecuaciones puede sustituirse por el siguiente sistema equivalente:

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 - \gamma N_{M1}^2 \left(\frac{w_2}{w_1} - 1 \right). \quad [4]$$

$$\frac{N_{M2}^2}{N_{M1}^2} = \frac{\frac{w_2}{w_1}}{1 - \gamma N_{M1}^2 \left(\frac{w_2}{w_1} - 1 \right)}. \quad [5]$$

$$q = \frac{c_p T_1}{2} \left(\frac{w_2}{w_1} - 1 \right) \left[-(\gamma + 1) N_{M1}^2 \frac{w_2}{w_1} + (\gamma - 1) N_{M1}^2 + 2 \right], \quad [6]$$

en el cual están expresados la presión, el número de MACH y el calor desarrollado en función de las condiciones en la sección 1 y de la relación w_2/w_1 . Si se elimina la velocidad entre las dos últimas fórmulas, se obtiene una expresión que relaciona los números de MACH y el calor desarrollado:

$$\begin{aligned} \frac{\left(1 + \frac{q}{c_p T_1} + \frac{\gamma - 1}{2} N_{M1}^2 \right) N_{M1}^2}{(1 + \gamma N_{M1}^2)^2} &= \\ &= \frac{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} N_{M2}^2 \right) N_{M2}^2}{(1 + \gamma N_{M2}^2)^2}. \end{aligned} \quad [7]$$

Finalmente, la relación entre las temperaturas se obtiene con la expresión:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} \frac{w_2}{w_1} = \left[1 - \gamma N_{M1}^2 \left(\frac{w_2}{w_1} - 1 \right) \right] \frac{w_2}{w_1}. \quad [8]$$

Condiciones iniciales subsónicas.

Este es el caso más importante y el que habrá de presentarse casi exclusivamente en la práctica.

La discrepancia que se observa en el estudio de esta cuestión está basada esencialmente en que las condiciones en la sección 1 sean o no independientes del calor comunicado. Aunque, como veremos, habrá casos que en esta constancia no parece que sea posible, de momento vamos a admitir que permanecen invariables aunque cambie la cantidad de calor; es decir, que pueden considerarse como verdaderas condiciones iniciales del problema. De acuerdo con ello, procederemos a analizar las funciones representadas por las fórmulas [4], [5], [6] y [8], suponiendo que sea variable la cantidad de calor q y con ella los valores de las demás magnitudes en la sección 2.

La función $q = f\left(\frac{w_2}{w_1}\right)$ es inicialmente creciente. Llega a un máximo cuando:

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{1 + \gamma N_{M1}^2}{(1 + \gamma) N_{M1}^2}, \quad [9]$$

decreciendo posteriormente y anulándose para:

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{2 + (\gamma - 1) N_{M1}^2}{(1 + \gamma) N_{M1}^2}. \quad [10]$$

La función $N_{M2} = f\left(\frac{w_2}{w_1}\right)$ crece uniformemente, tomando el valor $N_{M2} = 1$, cuando la relación de velocidades viene dada por [9], o sea para el valor que hacía máximo el calor comunicado.

La presión decrece linealmente desde el valor inicial hasta llegar a ser nula cuando:

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{1 + \gamma N_{M1}^2}{\gamma N_{M1}^2}. \quad [11]$$

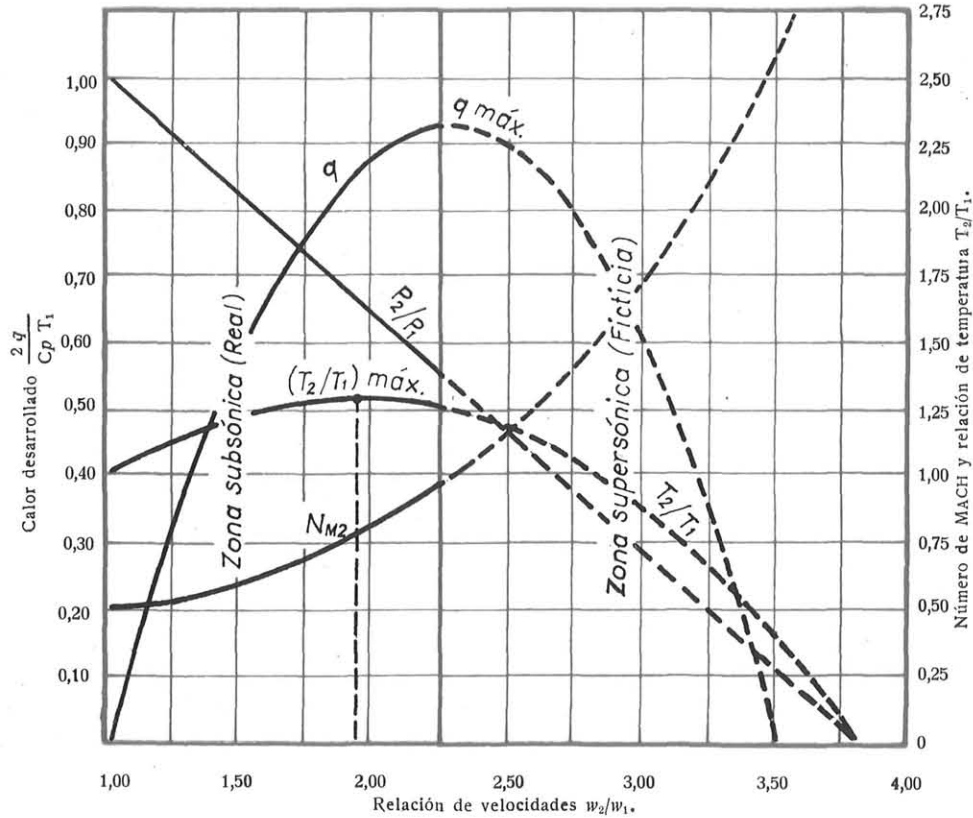


Fig. 2. - Curvas características del proceso de combustión en una tobera cilíndrica para velocidad inicial subsónica (condiciones fijas en la sección inicial).

Por último, la temperatura aumenta cuando w_2/w_1 crece. Llega a un máximo cuando:

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{1 + \gamma N_{M1}^2}{2 \gamma N_{M1}^2}; \quad [12]$$

disminuyendo a partir de este punto y anulándose para el mismo valor que la presión.

Si se sustituye el valor de w_2/w_1 dado en [12] en la fórmula [5], se obtiene:

$$(N_{M2})_{T_2 \text{ máx.}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}; \quad [13]$$

es decir, que la temperatura toma su valor máximo cuando el número de MACH en la sección 2 alcanza este valor.

Dicho valor máximo de la temperatura es igual a:

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)_{\text{máx.}} = \frac{1 - \gamma^2 N_{M1}^4}{4 \gamma N_{M1}^2}. \quad [14]$$

En la figura 2 están representadas estas curvas, habiéndose tomado un número de MACH inicial igual a 0,5. En la práctica hay que considerar que el proceso se realiza a la inversa; es decir, que lo que se fija es la cantidad de calor, y siendo la relación de velocidades w_2/w_1 función de ella. Según esto, si se fuesen comunicando cantidades crecientes de ca-

lor al gas, éste se iría acelerando (rama de la izquierda de la curva $q = f(w_2/w_1)$ de la figura 2) hasta alcanzar un número de MACH igual a la unidad, en cuyo caso el calor comunicado sería máximo. A partir de este punto, si se sustrajese calor al fluido, continuaría aumentando la velocidad del gas hasta llegar al límite máximo e inaccesible en el que se anulan la presión y temperatura.

En el caso de una aportación positiva de calor, que es el más interesante en la práctica, la zona supersónica es inaccesible, puesto que para llegar a ella sería necesario sustraer calor. Se obtiene, pues, la siguiente conclusión de gran importancia:

"Mediante un proceso de combustión puede acelerarse un gas en una tobera de sección constante hasta alcanzar un número de MACH unidad, pero nunca podrá llegar a conseguirse un régimen supersónico."

La cantidad de calor necesaria para alcanzar la velocidad del sonido (fig. 3) se obtendrá sustituyendo [9] en [6], resultando:

$$q_{\text{máx.}} = \frac{c_p T_1}{2} \frac{1 - N_{M1}^2}{(\gamma + 1) N_{M1}^2}. \quad [15]$$

Consideremos ahora el interesante caso de que la combustión desarrolla un calor superior al máximo que acaba de calcularse. Precisamente ha sido éste el problema que ha dado origen a las discre-

pancias que mencionamos entre las conclusiones que obtienen unos y otros autores.

En este caso, cuando $q > q_{\text{máx}}$, no tiene el problema ninguna solución matemáticamente posible. En efecto: la ecuación [6] no proporciona ningún valor real de w_2/w_1 , y la fórmula [7] también proporciona raíces imaginarias para N_{M2} .

Este resultado teórico del proceso ha sido interpretado por gran número de científicos, tales como M. ROY, SZCZENIOWSKI, ZUCROW, TURNER, etc., en el sentido de que "cuando el gas alcanza la velocidad del sonido, es incapaz de absorber más calor, o si éste procediese de una combustión, se extingüiría la reacción química, apagándose la llama".

Este resultado es realmente sorprendente y está en contraposición con la opinión sustentada por otros científicos, como HAWTHORNE, SHAPIRO, VINCENT, etc., quienes indican que al producirse o comunicarse un calor superior al correspondiente al número de MACH unidad, se produce un "choque térmico" en la corriente, el cual consiste en un cambio en las condiciones existentes en el fluido anteriores a la zona de aportación de calor, propagándose las perturbaciones contra la corriente mediante ondas de presión. En este caso se modificarían también las condiciones en la sección 1, en las que disminuiría la temperatura y número de MACH. En esta forma es fácil comprobar en la fórmula [15] que el fluido podría absorber cualquier cantidad de calor.

De índole muy diferente son las conclusiones a que llegan KAHANE y LEES, y especialmente los investigadores J. V. FOA y G. RUDINGER, del Cornell Aeronautical Laboratory, quienes en el año 1949 publicaron en el *Journal of the Aeronautical Sciences* un interesante trabajo (ref. 1), en el que resumen las opiniones sustentadas por otros autores y exponen las conclusiones a que ellos llegan. Indican que los cálculos no pueden efectuarse suponiendo que no se modifica la corriente en la zona anterior a la de aportación de calor, sino que las variables características de la vena dependen en todo caso de las condiciones iniciales o condiciones en los límites y de la cantidad de calor.

En dicho trabajo se considera primeramente el régimen de transición que se produce al comunicar inicialmente calor al gas, con formación de ondas de presión que se propagan en ambos sentidos de la corriente. Admiten la formación posterior de un estado estacionario, que deberá calcularse en función de las tres ecuaciones fundamentales que relacionan las variables entre las secciones 1 y 2 de comienzo y fin de la combustión o aportación de calor y de las condiciones de los límites. Para estas últimas im-

ponen un caso particular, en el que la tobera, por ser cilíndrica y con velocidad de salida subsónica, la presión p_2 habrá de ser siempre igual a la presión ambiente. Como condiciones iniciales fijan dos casos: constancia del gasto y de la temperatura total en la entrada de la tobera, como acontecería si ésta se alimentase a través de un difusor supersónico, y constancia de la presión y temperatura totales, como sucedería si la tobera se alimentase mediante un depósito de gas a presión constante.

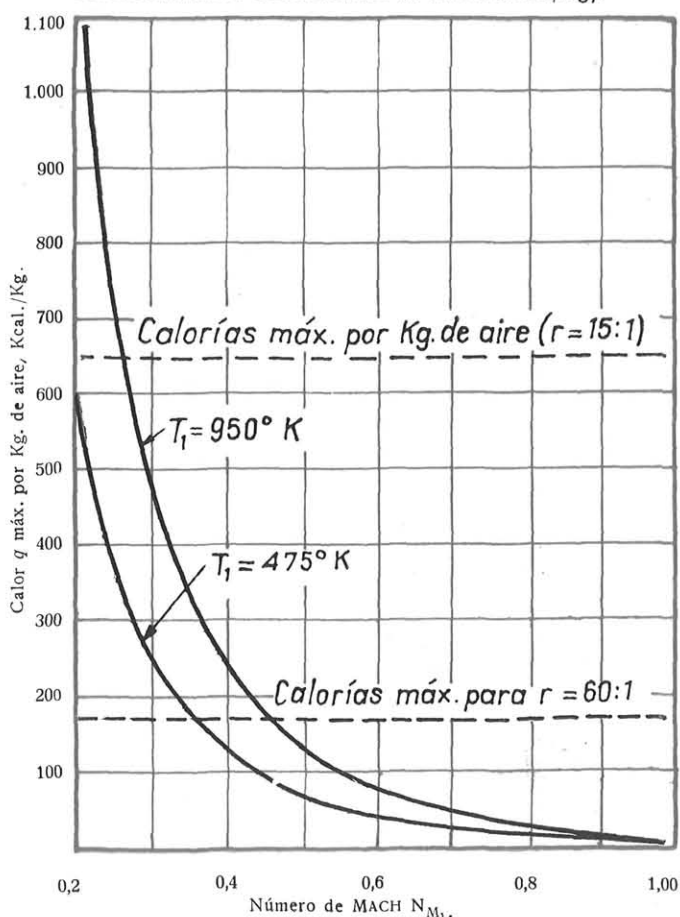
En la página siguiente insertamos un cuadro en el que se resumen las principales conclusiones a que se llega en este último caso, comparándolas también con las establecidas por otros autores.

Análisis de las conclusiones anteriores.

Sin que en ningún caso queramos imponer nuestra opinión, estimamos que puede ser de interés el efectuar un breve análisis de las conclusiones anteriores.

Estimamos nosotros que todo problema está

Fig. 3. - Calor necesario para acelerar un kilogramo de aire hasta la velocidad del sonido $C_p = 0,260$, poder calorífico inferior del keroseno ≈ 10.000 Kcal./Kg).



<i>Hipótesis 1.</i>	<i>Hipótesis 2.</i>	<i>Hipótesis 3.</i>
Las condiciones en la sección 1 permanecen invariables siempre.	Las condiciones en la sección 1 son constantes hasta que el calor sobrepasa el valor correspondiente a $N_M = 1$.	Las condiciones en la sección 1 son siempre función de la cantidad de calor y de las condiciones en los límites.
<p style="text-align: center;">CONCLUSIONES (Tobera cilíndrica, velocidad inicial subsónica).</p>		
No puede acelerarse un gas mediante una aportación de calor más que hasta un número de MACH igual a la unidad.	La misma.	La misma.
Cuando se añade calor al gas, éste se acelera, teniendo siempre hacia la unidad el número de MACH.	Igual que para la hipótesis 1.	El gas siempre se acelera, pero el número de MACH puede aumentar o disminuir.
Al desarrollarse calor, la temperatura del gas aumenta hasta que $N_M = 1/\sqrt{\gamma}$; luego, disminuye.	Igual que para la hipótesis 1.	La temperatura del gas aumenta siempre en comparación con la existente antes de la aportación de calor.
Si el calor comunicado o desarrollado es superior al correspondiente a $N_M = 1$, se extingue la llama o el fluido no absorbe más calor.	Si $q > q_{\max}$, se produce un choque térmico que modifica las condiciones en la sección 1, que deberán calcularse en función de la cantidad de calor y de las condiciones en los límites.	No existe ningún caso especial que dependa de la cantidad de calor, por ser siempre las condiciones en la sección 1 función de él.

bien planteado cuando partiendo de unas ciertas condiciones prefijadas y mediante aplicación de las ecuaciones generales del impulso, energía y continuidad, se llega a unos resultados que no están en contradicción con el segundo principio de Termodinámica ni con las condiciones en los límites.

La hipótesis 1 presenta la conclusión extraña de que se extinga la combustión o no sea capaz el fluido de absorber más calor cuando se alcance el número de MACH unidad. Parece ser que una conclusión de esta naturaleza no puede establecerse *a priori* sin estudiar con detenimiento el proceso químico de la combustión o bien las condiciones de propagación del calor a través de las paredes de la conducción. J. V. FOA y G. RUDINGER indican que cuando se llega a este resultado, que estiman como una contradicción física, lo que debe pensarse no es que el fluido no pueda absorber más calor, sino que el problema está mal planteado, no siendo posible admitir la constancia de las condiciones iniciales.

Por el contrario, a las conclusiones de la hipótesis 2 no les vemos ninguna contradicción lógica,

estimándolas perfectamente compatibles con las de la hipótesis 3, pero ambas estudiadas con diferentes condiciones en los límites. En efecto: FOA y RUDINGER estudian el problema partiendo de una presión constante en la sección 2 (excepto en el caso $N_{M_2} = 1$), y en este caso no resulta posible mantener constantes las condiciones en la sección 1 cuando se modifica la cantidad de calor. En cambio, con la hipótesis 2 ya vimos que la presión p_2 disminuía a medida que aumentaba el calor desarrollado, lo que lleva consigo el suponer implícitamente que las condiciones en la salida de la tobera se modifican al mismo tiempo que la cantidad de calor, a fin de permitir que se establezca dicho valor decreciente de la presión en la sección 2.

En este caso, y mientras que el valor desarrollado sea inferior a q_{\max} , no vemos que se presente incompatibilidad alguna con la constancia de las condiciones en la sección 1. El decrecimiento de la temperatura a partir de $N_{M_2} > 1/\sqrt{\gamma}$ no está en contradicción con el segundo principio de la Termodinámica.

En efecto: el cambio de entropía entre las secciones 1 y 2 viene dado por:

$$S_2 - S_1 = c_p \left(\log \frac{T_2}{T_1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \log \frac{p_2}{p_1} \right), \quad [16]$$

y con las fórmulas [4] y [8] resulta:

$$S_2 - S_1 = \frac{c_p}{\gamma} \log \left[1 - \gamma N_{M1}^2 \left(\frac{w_2}{w_1} - 1 \right) + c_p \log \frac{w_2}{w_1} \right]. \quad [17]$$

O bien en su expresión diferencial:

$$dS = \frac{c_p}{w_2 w_1} d \frac{w_2}{w_1} - \frac{c_p N_{M1}^2}{1 - \gamma N_{M1}^2 \left(\frac{w_2}{w_1} - 1 \right)} d \frac{w_2}{w_1}. \quad [18]$$

Con las expresiones anteriores puede comprobarse que la entropía crece a medida que w_2/w_1 aumenta, hasta que se llega al valor:

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{1 + \gamma N_{M1}^2}{(1 + \gamma) N_{M1}^2},$$

correspondiente a $N_{M2} = 1$, en el que la entropía alcanza un máximo, siendo $dS = 0$. Hay que tener en cuenta que T_1 es en este caso la temperatura inicial antes de producirse la aportación de calor, y que, de acuerdo con el segundo principio, la entropía ha ido aumentando a medida que se añadía calor.

La disminución de temperatura a partir del valor $N_{M2} = 1/\sqrt{\gamma}$ no está en contradicción con este principio. Al ir aumentando el calor comunicado, ya hemos visto que hay que ir permitiendo la expansión del gas mediante una modificación de las condiciones en la salida. De esta manera llega un momento en que el enfriamiento producido por dicha expansión, cada vez con presiones finales más reducidas, supera al incremento de temperatura debido al calor comunicado, instante a partir del cual comenzará a disminuir la temperatura final T_2 .

Para esta hipótesis 2, cuando $q > q_{\max}$, ya no es posible admitir la constancia de las condiciones en la sección 1, las cuales hay que calcularlas como en el caso de la hipótesis 3, es decir, a partir de las condiciones en los límites: dos en la entrada y una en la salida, que, unidas a las tres ecuaciones generales, nos proporcionarían las seis incógnitas del problema.

En resumen: parece ser que tanto las conclusiones derivadas de la hipótesis 2 como las de la 3 son perfectamente válidas. Las primeras, siempre que se suponga una condición límite — la presión de salida — variando de acuerdo con el resultado del proceso, y las conclusiones 3, cuando se admiten

condiciones límites fijas, particularizadas para el caso de desembocar directamente la tobera en la atmósfera ambiente.

El caso general en el que se impongan dos condiciones iniciales (la temperatura total y el gasto, o la temperatura y presión totales) y la presión p_2 no tenga un valor prefijado, sino que únicamente haya que establecer que ha de ser compatible con las condiciones en la salida de la tobera, es de difícil solución matemática. Las tres ecuaciones generales entre las secciones 1 y 2, las dos condiciones iniciales, y la ecuación que relaciona las tres variables características en la sección 2 con la presión de salida proporcionarían las seis incógnitas del problema. Esta última ecuación, para el caso sencillo de que la tobera cilíndrica desembogue en el aire ambiente a través de una tobera de sección variable, es igual a:

$$\frac{\gamma - 1}{2} \left[\left(\frac{p_e}{p_2} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_e} \right)^2 - 1 \right] - \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_2} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right] = 0; \quad [19]$$

en la que con el subíndice e se indican las condiciones en la sección de salida. Cuando el gas se expande en la tobera divergente hasta una velocidad igual o superior a la del sonido, debe sustituirse la expresión anterior por la que relaciona p_2 , T_2 , N_{M2} y el número de MACH en la sección de salida o en la sección mínima, tomado igual a la unidad.

En el caso estudiado por FOA y RUDINGER, de ser la presión p_2 constante e igual a la presión ambiente (excepto cuando $N_{M2} = 1$), de gran interés por ser frecuente que las toberas comuniquen directamente con la atmósfera, se obtienen también los siguientes resultados (ref. 1):

Cuando el gasto y la temperatura total T_{i0} son constantes, el N_{M1} aumenta a medida que es mayor el calor desarrollado (fig. 4). El N_{M2} aumenta también, debiendo referirse ambos valores al número de MACH inicial N_{Mi} existente en la tobera antes de aportarse calor. Cuando N_{M2} toma un valor unidad, N_{M1} disminuye a medida que el calor comunicado aumenta (curva superior de la figura 4), independientemente del número de MACH inicial. Esta curva corresponde también al caso de choque térmico de la hipótesis 2, considerando en ella $N_{Mi} = N_{M1}$.

En cambio, cuando las temperaturas y presiones totales T_{i0} y p_{i0} son constantes, el número de MACH en la sección 2 puede disminuir al aumentar el calor desarrollado (fig. 5), fenómeno que se presenta cuando $p_{i0}/p_e < [(\gamma + 1)/2]^{\gamma/(\gamma - 1)}$, decreciendo dicho número de MACH y tendiendo al valor límite $\sqrt{(p_{i0}/p_e - 1)/\gamma}$ (p_e es la presión exterior de la sección de salida). El número de MACH en la sección 1 disminuye más rápidamente que en

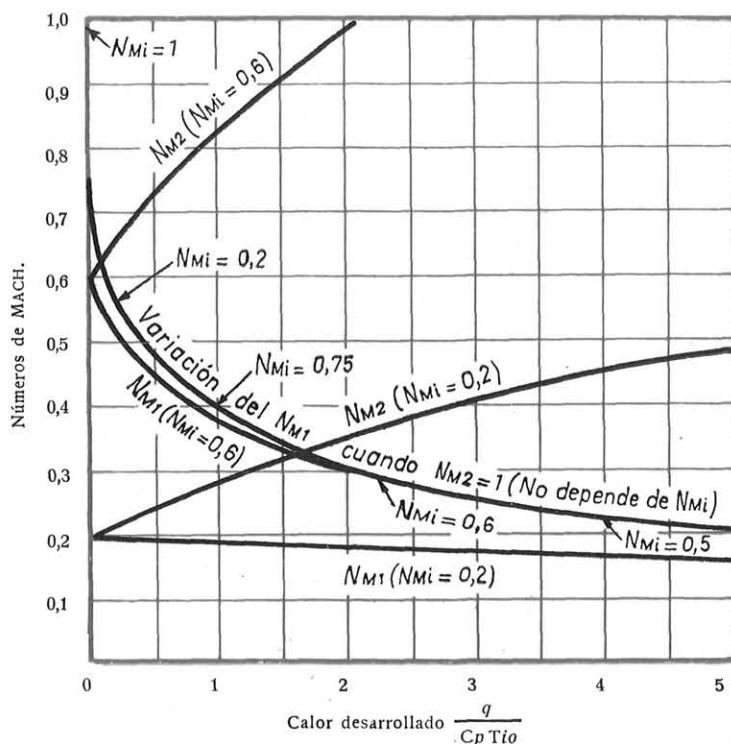


Fig. 4. - Variación de los números de Mach en las secciones 1 y 2 cuando el gasto y la temperatura total T_{10} son constantes (según gráficas de la ref. 1).

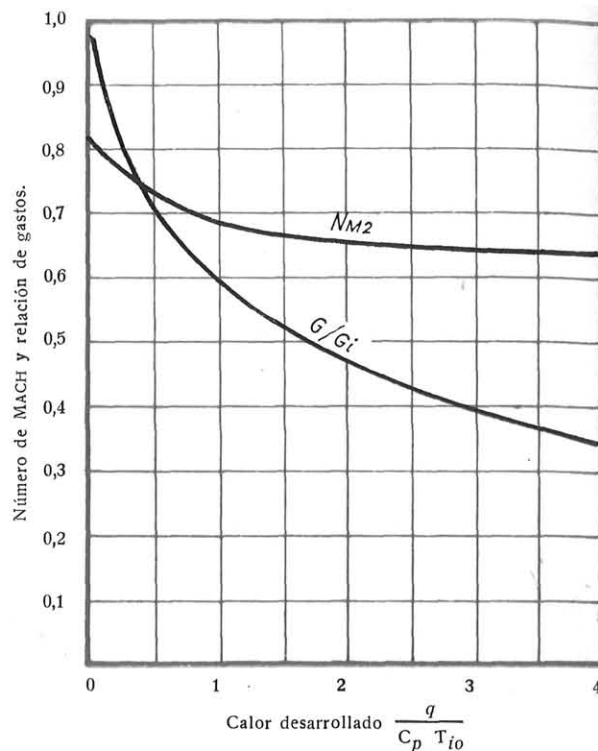


Fig. 5. - Variación del número de Mach en la sección 2 y del gasto en peso de gas cuando la temperatura y presión totales T_{10} y P_{10} son constantes (ref. 1).

el caso anterior y el gasto en peso se reduce notablemente al aumentar la cantidad de calor. Mayores detalles sobre esta interesante cuestión y ejemplos prácticos de aplicación pueden consultarse en dicha referencia.

Condiciones iniciales supersónicas.

En la figura 6 están dibujadas las curvas características de un proceso de combustión en una tobera cilíndrica cuando el número de MACH inicial es superior a la unidad. Se han tomado para su cálculo condiciones fijas en la sección 1, y se han supuesto condiciones límites en la salida compatibles en todo caso con la presión resultante en la sección 2.

Las principales conclusiones a que se llega son las siguientes:

- Al comunicar calor al gas, la velocidad disminuye, tendiendo a coincidir con la velocidad del sonido.
- No puede pasarse de un modo continuo de régimen supersónico a subsónico mediante un proceso de combustión o mediante una aportación positiva de calor.
- Es posible la realización del proceso anterior de una manera discontinua mediante la forma-

ción de una onda de choque antes de iniciarse la combustión, seguida de un aumento de la velocidad del gas, ya dentro de la zona subsónica.

TOBERAS DE SECCIÓN VARIABLE

Este es realmente el caso que presenta un mayor interés práctico. La pérdida de presión que se produce en una tobera cilíndrica supone un grave inconveniente en muchos casos, pérdidas de presión que pueden disminuirse e incluso anularse mediante la utilización de una tobera divergente. Por esta razón se disponen estos tipos de toberas en la parte anterior, o zona donde se quema el combustible, en todas las cámaras de combustión de los turborreactores.

Es muy escasa la bibliografía referente a esta cuestión, siendo prácticamente imposible resolver el problema en toda su generalidad. No obstante, veremos que mediante la introducción en los cálculos de una sección media de la tobera podrán obtenerse numerosas conclusiones de gran interés, e incluso podrá llegarse al dimensionado de ella en algunos casos particulares.

Como nos va a interesar esencialmente comparar las pérdidas de presión existentes en estas toberas con las que se producen en las toberas cilíndricas, así

como la cantidad de calor que puede desarrollarse en ellas, tendrá especial ventaja considerar el caso correspondiente a la hipótesis número 2, es decir, suponer que las condiciones en la salida se ajustan en todo caso, a fin de permitir que se establezca la presión resultante en la sección 2 y que las condiciones en la sección 1 permanezcan constantes.

Realmente, es éste el caso más general y del que pueden obtenerse conclusiones más amplias, puesto que no se impone ningún valor restrictivo para las condiciones en los límites. Además, para cualquier tipo de condiciones en los límites serán válidas las conclusiones que se obtengan, siempre que éstas se refieran a variaciones relativas de los parámetros entre las secciones 1 y 2, independientemente de que las condiciones en la sección 1, por ejemplo, puedan modificarse respecto a ciertos valores iniciales. Por otra parte, podrían efectuarse sin mayor dificultad los cálculos, mediante la simplificación que introduciríamos, admitiendo cualquier clase de condiciones en los límites, como en el caso de que se suponga constante la presión final en la sección de salida.

Ecuaciones generales.

Las ecuaciones del impulso, continuidad y energía en forma diferencial las expresamos del modo siguiente:

$$\frac{w dw}{g} + v dp = 0. \quad [20]$$

$$d \frac{\sigma w}{v} = 0. \quad [21]$$

$$J dq = J c_p dT + \frac{w dw}{g}. \quad [22]$$

Las dos últimas ecuaciones pueden integrarse de un modo inmediato entre el estado inicial de sección σ_1 , en el que comienza la aportación de calor, y el estado final de sección σ_2 en el que termina el proceso, resultando (fig. 7):

$$\frac{\sigma_1 w_1}{v_1} = \frac{\sigma_2 w_2}{v_2}. \quad [23]$$

$$Jq = J c_p (T_2 - T_1) + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g}. \quad [24]$$

En cambio, la ecuación del impulso no puede integrarse, puesto que interviene en ella una función desconocida de la presión. Despejando el volumen específico en [23] y sustituyendo en [20], se obtiene:

$$\frac{w_2 - w_1}{g} + \frac{v_1}{\sigma_1 w_1} \int_1^2 \sigma dp = 0. \quad [25]$$

Podemos poner:

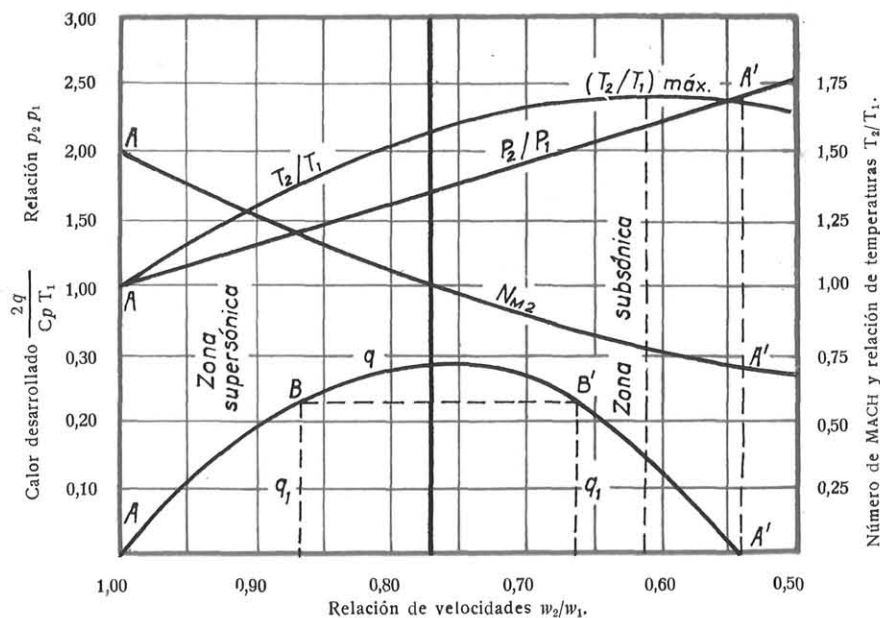
$$\sigma_m = \frac{1}{p_2 - p_1} \int_1^2 \sigma dp, \quad [26]$$

en la que la sección media σ_m será función de la distribución de presiones entre 1 y 2 y de la forma de la tobera. Admitiendo que la sección de ésta varía monótonamente, aumentando o disminuyendo, y que lo mismo acontece para la presión, tendremos:

$$\sigma_1 < \sigma_m < \sigma_2 \quad (\text{si } \sigma_2 > \sigma_1).$$

$$\sigma_1 > \sigma_m > \sigma_2 \quad (\text{si } \sigma_2 < \sigma_1).$$

Fig. 6. - Curvas características del proceso de combustión en una tobera cilíndrica para velocidad inicial supersónica (condiciones fijas en la sección inicial).



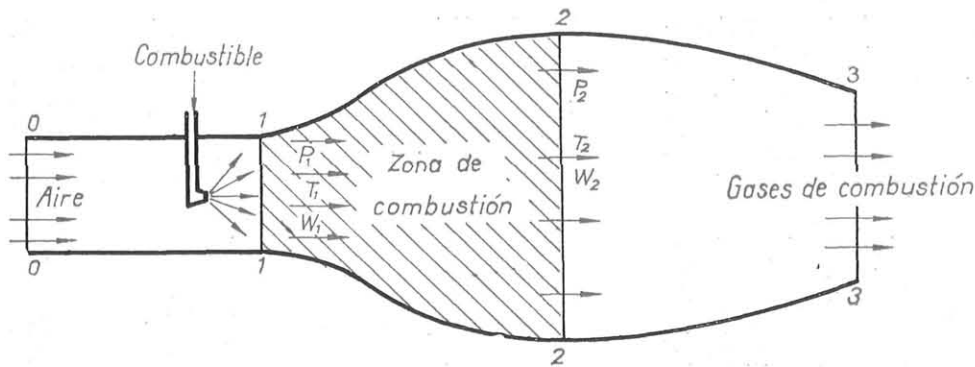


Fig. 7. - Proceso de combustión en una tobera divergente.

Con esto, resulta para la ecuación [25] :

$$\frac{w_2 - w_1}{g} + \frac{v_1 p_1}{\sigma_1 w_1} \sigma_m \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) = 0. \quad [27]$$

Con esta ecuación y las [23] y [24] efectuamos una sencilla transformación, en la que se toma como variable independiente la relación w_2/w_1 , expresando previamente el volumen específico en función de la presión y temperatura y eliminando esta última variable mediante la introducción del número de MACH. Se obtiene:

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 - \gamma N_{M1}^2 \frac{\sigma_1}{\sigma_m} \left(\frac{w_2}{w_1} - 1 \right). \quad [28]$$

$$N_{M2}^2 = N_{M1}^2 \frac{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{w_2}{w_1}}{1 - \gamma N_{M1}^2 \frac{\sigma_1}{\sigma_m} \left(\frac{w_2}{w_1} - 1 \right)}. \quad [29]$$

$$q = c_p T_1 \left[\left(1 + \gamma N_{M1}^2 \frac{\sigma_1}{\sigma_m} \right) \frac{w_2}{w_1} - \left(\gamma N_{M1}^2 \frac{\sigma_1}{\sigma_m} - \frac{\gamma - 1}{2} N_{M1}^2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) \frac{w_2^2}{w_1^2} - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} N_{M1}^2 \right) \right]. \quad [30]$$

Resultando un sistema análogo al formado por las ecuaciones [4], [5] y [6] correspondiente al caso de tobera cilíndrica. Ambos sistemas coinciden cuando $\sigma_1 = \sigma_m = \sigma_2$.

Para las temperaturas se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{T_2}{T_1} &= \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{p_2}{p_1} \frac{w_2}{w_1} = \\ &= \left[1 - \gamma N_{M1}^2 \frac{\sigma_1}{\sigma_m} \left(\frac{w_2}{w_1} - 1 \right) \right] \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{w_2}{w_1}. \end{aligned} \quad [31]$$

Condiciones iniciales subsónicas.

Para este caso, único que se presentará en la práctica, vamos a comprobar que tendrá una ventaja especial la utilización de una tobera divergente, en forma análoga a la de un difusor.

El estudio vamos a efectuarlo tomando como parámetro de valor constante la relación σ_1/σ_2 . Esto significará que solamente interesará considerar los estados inicial y final, variando este último de acuerdo con la cantidad de calor desarrollado durante la combustión. La sección media σ_m la tomaremos constante en algunos casos, aunque en realidad depende de las condiciones finales, puesto que la distribución de presiones es función de ellas. No obstante, los resultados que se obtengan serán perfectamente válidos desde un punto de vista cualitativo, ya que σ_m es un parámetro acotado entre otros dos. Además, para la clase de conclusiones que aquí vamos a obtener podrá admitirse que también serán ciertas, aun en su aspecto cuantitativo.

La función $q = f(w_2/w_1)$ presenta la misma forma general que la correspondiente al caso de tobera cilíndrica. Es una curva de segundo grado que tiene un máximo, dado por:

$$\left(\frac{w_2}{w_1} \right)_{q \text{ máx}} = \frac{1 + \gamma N_{M1}^2 \frac{\sigma_1}{\sigma_m}}{2 \gamma N_{M1}^2 \frac{\sigma_1}{\sigma_m} - (\gamma - 1) N_{M1}^2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2}}. \quad [32]$$

Ahora bien, a diferencia de lo que acontecía en el caso de tobera de sección constante, para este valor de w_2/w_1 no se alcanza la velocidad del sonido.

El valor de w_2/w_1 , que hace el número de MACH igual a la unidad, se deduce de [29], resultando:

$$\left(\frac{w_2}{w_1} \right)_{N_M=1} = \frac{1 + \gamma N_{M1}^2 \frac{\sigma_1}{\sigma_m}}{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} N_{M1}^2 + \gamma N_{M1}^2 \frac{\sigma_1}{\sigma_m}}. \quad [33]$$

Expresando el denominador de la fórmula [32] en la forma:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} N_{M1}^2 + \gamma N_{M1}^2 \frac{\sigma_1}{\sigma_m} + \gamma N_{M1}^2 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_m} - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right),$$

se comprueba inmediatamente que si la tobera es divergente $\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_m} > \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)$, se alcanza antes el máximo del calor desarrollado que el número de MACH unidad. Por tanto, se obtiene la siguiente conclusión:

“En una tobera divergente y mediante un proceso de combustión que se inicie con velocidad subsónica, no podrá alcanzarse nunca la velocidad del sonido.”

Como es natural, el proceso es a la inversa en una tobera convergente.

Para $w_2/w_1 = 1$, se obtiene:

$$(q)_{w_2/w_1=1} = \frac{\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} - 1 \right) w_1^2}{g J (\gamma - 1) N_{M1}^2} = (\gamma - 1) c_p T_1 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} - 1 \right). \quad [34]$$

Como vemos, si la tobera es divergente se obtiene un valor positivo y, por tanto, real, del calor desarrollado. Esto significa que en una tobera divergente puede realizarse un proceso de combustión acelerando o decelerando el gas, según que su relación de secciones σ_2/σ_1 sea menor o mayor que el deducido de la fórmula [34] en función del calor desarrollado. Para $w_2/w_1 = 1$, la fórmula [28] indica que la combustión se realiza a presión constante.

Puede comprobarse fácilmente que este calor dado por [34] es inferior a $q_{\text{máx}}$ en una tobera divergente, o bien que la relación de velocidades obtenida en [32] es superior a la unidad.

En la figura 8 están representadas, en función del calor de combustión, los valores de la relación σ_2/σ_1 necesarios para que la combustión se verifique a presión constante, habiéndose tomado dos valores para la temperatura inicial: uno, del orden de los existentes en la entrada de las cámaras de combustión de los turborreactores, y otro, correspondiente a la temperatura de los gases a su salida de la turbina, de especial aplicación para el caso de que se instalase un sistema de postcombustión en ellos.

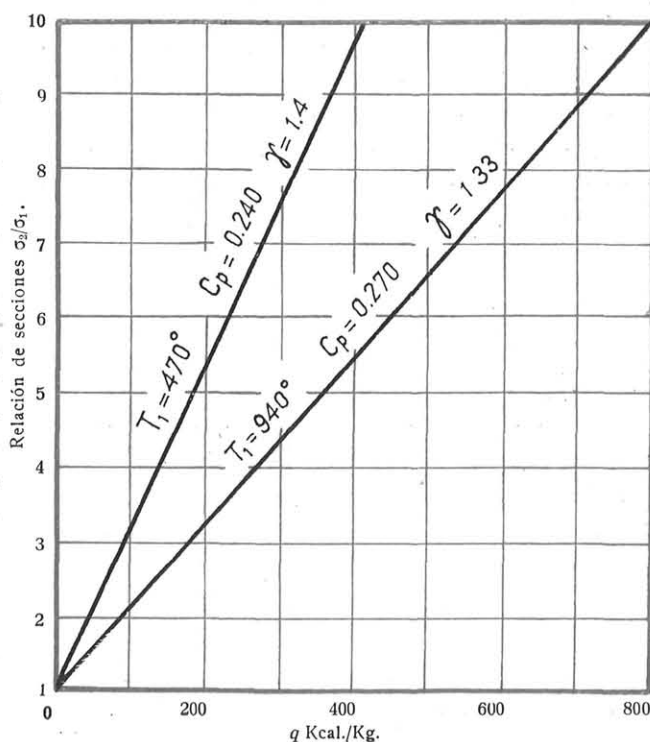
Esta es una de las grandes ventajas de las toberas divergentes, que, permitiendo realizar la combustión a presión constante, hacen que se invierta todo

el calor de combustión en aumento de la temperatura del gas, objeto generalmente buscado en las cámaras de combustión.

La otra ventaja, también de la mayor importancia, que presentan las toberas divergentes es que con ellas puede comunicarse al gas una mayor cantidad de calor que en una tobera de sección constante. Para comprobar esta cuestión, compararemos los valores que se obtienen para $q_{\text{máx}}$ en ambos casos. Sustituyendo el valor de w_2/w_1 dado por [32] en la fórmula [30], se obtiene:

$$q_{\text{máx}} = \frac{w_1^2}{g J (\gamma - 1) N_{M1}^2} \left[\frac{\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \left(1 + \gamma N_{M1}^2 \frac{\sigma_1}{\sigma_m} \right)^2}{2 \left[2 \gamma N_{M1}^2 \frac{\sigma_1}{\sigma_m} - (\gamma - 1) N_{M1}^2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right]} - \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} N_{M1}^2 \right) \right]. \quad [35]$$

Fig. 8.—Relación de secciones en una tobera divergente para realizar una combustión a presión constante, en función del calor desarrollado y para diferentes condiciones iniciales.



Bastando comparar el término:

$$\phi_d = \frac{\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \left(1 + \gamma N_{M1}^2 \frac{\sigma_1}{\sigma_m}\right)^2}{2 \gamma N_{M1}^2 \frac{\sigma_1}{\sigma_m} - (\gamma - 1) N_{M1}^2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \quad [36]$$

con el correspondiente al caso de tobera de sección constante:

$$\phi_c = \frac{(1 + \gamma N_{M1}^2)^2}{(1 + \gamma) N_{M1}^2} \quad [37]$$

Para efectuar esta comparación hemos de considerar que en la expresión de ϕ_d interviene un parámetro σ_1/σ_m , cuyo valor se desconoce, sabiendo únicamente que ha de estar comprendido entre σ_1/σ_2 y la unidad. Esta cuestión se resolverá tomando en cada caso el valor de σ_1/σ_m que haga mínima la función ϕ_d , con lo cual quedará probada la cuestión de un modo riguroso, independientemente del valor verdadero que pudiera tener dicho parámetro.

La función $\phi_d(\sigma_1/\sigma_m)$ presenta un mínimo dado por:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_m}\right)_{\phi_{d \min}} = \frac{1}{\gamma N_{M1}^2} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad [38]$$

Como ha de verificarse siempre que:

$$\sigma_1/\sigma_2 < \sigma_1/\sigma_m < 1,$$

solamente tendrá este mínimo un significado real cuando se cumplan dichas condiciones. Es fácil comprobar que la primera condición se cumple para todo valor, inferior a la unidad, del número de MACH inicial. En cambio, para que sea $\sigma_1/\sigma_m < 1$, habrá de verificarse:

$$N_{M1}^2 > \frac{1}{\gamma - (\gamma - 1) \frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \quad [39]$$

Si no se verifica esta última condición, el mínimo se presentará fuera del intervalo de variación posible de σ_1/σ_m , siendo la función decreciente en dicho intervalo, ya que toma un valor infinitamente grande para:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_m} = \frac{\gamma - 1}{2 \gamma} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} < \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

y es su derivada negativa entre este valor y el correspondiente al mínimo. Por tanto, en el mencionado

intervalo el valor mínimo de ϕ_d , como caso más desfavorable, se obtendrá tomando $\sigma_1/\sigma_m = 1$. En estas condiciones, tenemos:

$$\begin{aligned} \phi_d &= \frac{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} (1 + \gamma N_{M1}^2)^2}{2 \gamma N_{M1}^2 - (\gamma - 1) N_{M1}^2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2}} = \\ &= \frac{1}{2 \gamma \frac{\sigma_1}{\sigma_2} - (\gamma - 1) \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2} \frac{(1 + \gamma N_{M1}^2)^2}{N_{M1}^2} \end{aligned}$$

Como para cualquier valor de σ_1/σ_2 , menor que la unidad, se verifica.

$$2 \gamma \frac{\sigma_1}{\sigma_2} - (\gamma - 1) \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2 < 1 + \gamma,$$

resulta:

$$\phi_d > \phi_c,$$

como quería demostrarse.

Por el contrario, si el número de MACH inicial y la relación σ_1/σ_2 verifican la condición [39], efectuaremos la comparación tomando el valor mínimo de ϕ_d , que se obtiene sustituyendo [38] en [36], resultando:

$$\phi_{d \min} = 2 \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - (\gamma - 1) N_{M1}^2 \quad [40]$$

Es fácil comprobar que se verifica:

$$2 \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - (\gamma - 1) N_{M1}^2 > \frac{(1 + \gamma N_{M1}^2)^2}{(1 + \gamma) N_{M1}^2}$$

para toda pareja de valores de N_{M1} y σ_1/σ_2 que satisfagan la relación [39]. En el caso límite $\sigma_1/\sigma_2 = 1$, $N_{M1} = 1$ coinciden ambos valores, como ya podía esperarse.

Una vez hechas estas consideraciones previas, podemos analizar en conjunto el proceso de combustión en una tobera divergente. En la figura 9 están representadas las curvas correspondientes al estado final del proceso, expresadas las variables en función de la relación de velocidades w_2/w_1 . Estas curvas no deben considerarse más que como una aproximación del proceso verdadero, ya que se han tomado para su cálculo valores constantes del parámetro σ_1/σ_m para diferentes condiciones finales.

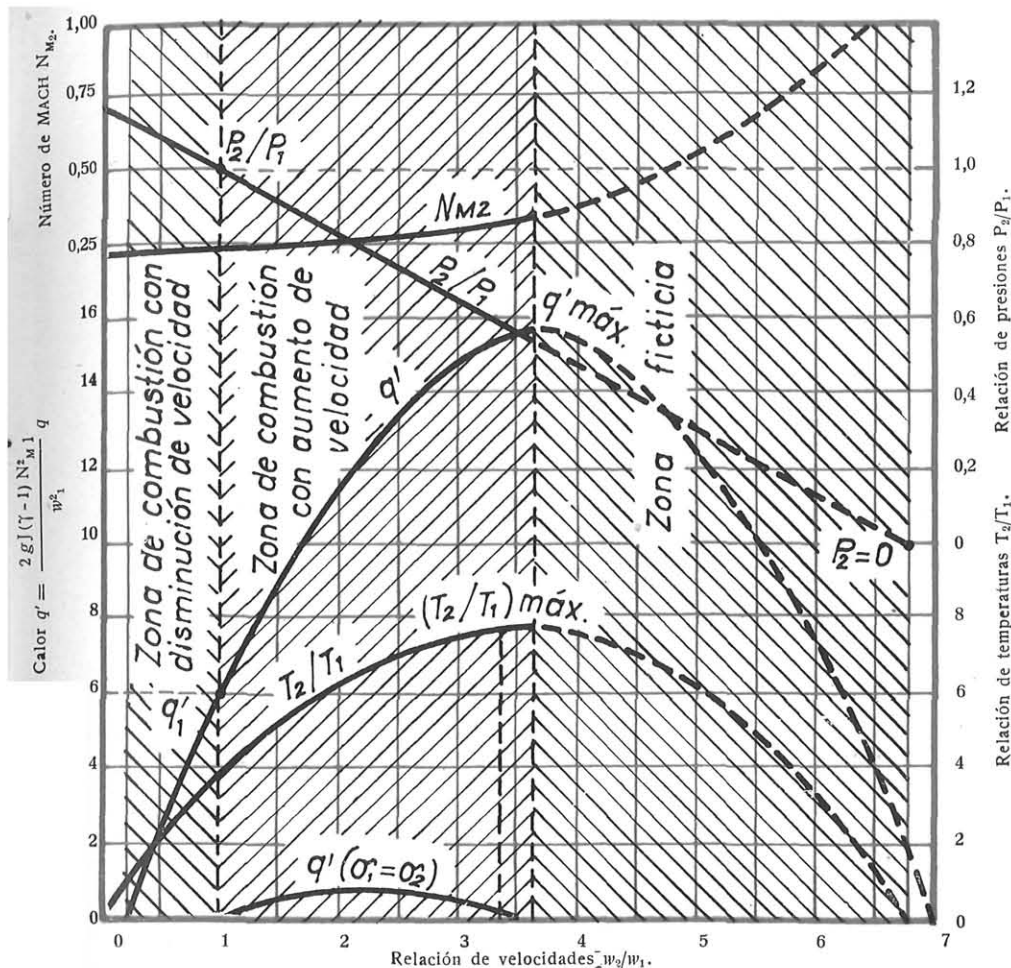


Fig. 9. - Curvas representativas del estado final en un proceso de combustión en una tobera divergente $\left(N_{M1} = 0,5, \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 0,25 \frac{\sigma_1}{\sigma_m} = 0,50\right)$.

En dichos gráficos puede apreciarse que cuando el calor de combustión sea inferior al valor q_1 , correspondiente al caso de velocidades y presiones constantes, la combustión se realizará con disminución de la velocidad y aumento de la presión del gas, mientras que sucederá el caso contrario si el calor desarrollado es superior a dicho valor. Análogamente a lo que acontecía en una tobera de sección constante, todos los valores de w_1/w_2 superiores al que corresponde a $q_{m\acute{a}x}$, pertenecen a una zona que no tiene significado físico real, pues para alcanzarla tendría que haberse desarrollado un calor superior al máximo.

Cuando el calor es igual a q_1 se invierte totalmente en aumentar la entalpía del gas. La presión y velocidad permanecen constantes mientras que la temperatura alcanza en nuestro caso un valor cuatro veces superior al inicial, dando esto origen a una disminución del número de MACH, que desde el valor inicial de 0,5 ha pasado a valer 0,25 solamente.

En la misma figura está dibujada la curva de ca-

lores que correspondería a una tobera de sección constante con iguales condiciones iniciales. Puede observarse cómo el calor que puede absorberse en la tobera divergente es del orden de quince veces mayor que el obtenido en la tobera cilíndrica.

Como vemos, en todo caso la tobera divergente es mucho más conveniente que una tobera de sección constante, razón por la cual se utiliza en las cámaras de combustión de los turborreactores, que tienen esta forma en su parte anterior, y en los dispositivos de combustión detrás de la turbina. La forma y disposición más conveniente de estas toberas dependen de las condiciones particulares de cada caso, interviniendo esencialmente en su estudio los métodos experimentales.

Las toberas convergentes tienen un funcionamiento de características opuestas al de las divergentes. El gas se acelera rápidamente en ellas, no absorbiéndose apenas calor, con lo cual se obtienen efectos contrarios a los que normalmente se buscan en las cámaras de combustión.

Condiciones iniciales supersónicas.

El caso correspondiente a condiciones iniciales supersónicas no presenta apenas interés, pues la generalidad de los procesos de combustión o de aportación de calor son siempre con velocidad inicial subsónica, con una posible formación de onda de choque antes de la cámara de combustión si la velocidad exterior a ella fuese supersónica (estatorreactores, por ejemplo). En todo caso, puede estudiarse sin dificultad el problema en forma análoga a como se ha hecho en el caso subsónico. Las principales conclusiones que se obtienen son las siguientes:

"Si se utiliza una tobera convergente, el gas disminuye rápidamente de velocidad, alcanzándose prontamente el estado sónico y no absorbiendo el fluido apenas calor."

"Con una tobera divergente no puede alcanzarse nunca la velocidad del sonido, ya que en ella se produce antes el máximo de calor desarrollado. La combustión se efectúa normalmente con una disminución de la velocidad, aunque en ciertas condiciones podría llegarse a una aceleración del mismo."

Referencias y bibliografía.

1. FOA, J. V., and RUDINGER, G.: "On the addition of Heat to a Gas Flowing in a Pipe at Subsonic Speed." *Journal of the Aeronautical Sciences*, vol. 16, núm. 2, febrero 1949.
2. ROY, M.: *Thermodynamique des Systèmes Propulsifs à Réaction et de la Turbine à Gaz*, cap. II, págs. 31-44. Dunod, París, 1947.
3. VINCENT, E. T.: *The Theory and Design of Gas Turbines and Jet Engines*, cap. II, págs. 48-54. Mac Graw-Hill Book, New York, 1950.
4. GODSEY, F. W.: *Gas Turbines for Aircraft*, cap. III, págs. 55-62. Mac Graw-Hill Book, New York, 1949.

5. HAWTHORNE, W. R.: "Factors Affecting the Design of Jet Turbines". *S. A. E. Journal* (Transactions), vol. 54, núm. 7, julio 1946.
6. SZCZENIOWSKI, B.: "Flow of Gas through a Tube of Constant Cross-Section with Heat Exchange". *Canadian Journal of Research*, Section A, vol. 23, núm. 1, enero 1945.
7. TURNER, L. R.; ADDIE, A. N., and ZIMMERMAN, R. H.: "Charts for the Analysis of One-Dimensional Gas Flow". *N. A. C. A. Technical Report*, núm. 1.419, enero 1948.
8. KAHANE, A., and LEES, L.: "Unsteady One-Dimensional Flows with Heat Addition or Entropy Gradients". *Project SQUID Technical Memorandum*, núm. Pr-2, noviembre 1947.
9. SHAPIRO, A. H., and HAWTHORNE, W. R.: *The Mechanics and Thermodynamics of Steady One-Dimensional Gas Flow*. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 14, núm. 4, diciembre 1947.
10. ZUCROW, M. J.: *Principles of Jet Propulsion and Gas Turbines*. John Wiley & Sons, New York, 1948.
11. CHAMBREAND, P., and LIN, C. C.: "On the Steady Flow of a Gas Through a Tube with Heat Exchange or Chemical Reaction". *Journal of the Aeronautical Sciences*, vol. 13, núm. 10, octubre 1946.
12. GRAHAM, M.: *Effect of Heat Addition on the One-Dimensional Flow of a Compressible Non-Viscous Gas Through a Pipe of Constant Cross-Section*. Douglas Aircraft Company, Inc., Report núm. SM-12.054, 15 enero 1947.
13. BAILEY, N. P.: "Abrupt Energy Transformations in Flowing Gases". *Transactions of the A. S. M. E.*, vol. 69, núm. 7, octubre 1947.
14. SAUER, R.: *Introduction to Theoretical Gas Dynamics*. J. W. Edwards, Ann Arbor, Michigan, 1947.

